

10. Как управлять квадрокоптером? [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://quadrocoptery.ru/how-to-fly-a-quadcopter/>

*А. М. Красовський, О.О. Сулова. Спрощена математична модель керованного руху квадрокоптера. – Стаття.*

*Анотація.* У статті розглядається спрощена математична модель руху квадрокоптера під дією деяких обраних управляючих впливів. При цьому в якості таких впливів вибираються кутові швидкості обертання гвинтів. Кожен з чотирьох гвинтів забезпечений своїм електродвигуном і, отже, швидкості обертання всіх гвинтів можуть бути різними. Розглянуто випадки вибору управлінь, які забезпечують вертикальний зліт або посадку, випадки обертання квадрокоптера в горизонтальній площині на деякій фіксованій висоті, а також його політ в будь-якому напрямку в горизонтальній площині. Пропонується і обґрунтовується деяка нова модифікація математичної моделі польоту в формі диференціальних рівнянь Ньютона-Ейлера. Розглядається оптимізація руху польоту за критерієм якості процесу управління, що визначає витрати енергії на вироблення управляючих впливів на заданому зафіксованому відрізку часу.

*Ключові слова:* квадрокоптер, рух, математична модель, управляючий вплив.

*Andrei N. Krasovskii, Olga A. Suslova. A Simplified Mathematical Model of the Controlled Motion of the Quadrocopter. – Article.*

*Summary.* A simplified mathematical model of a quadrocopter motion under some controlled actions is considered. As these actions angular velocities of helix blades rotation are chosen. Each of four helix blades has own electric motor and, consequently, rotation velocities can be different. Cases of control choose, that provide vertical takeoff and landing, cases of quadrocopter rotation in horizontal plane on some fixed height and case of its flight in some direction in horizontal plane are considered. Some new modification of a mathematical model of the flight in the form of Newton-Euler differential equations is proposed and proved. An optimization of the flight motion with the quality index of control process, that determines the energy consumption for the production of control actions in a given fixed time interval is considered. In this time interval the drone makes a flight from the given initial to the given terminal position in the three-dimensional Euclidian space.

*Key words :* quadrocopter , motion , mathematical model, control action.

**УДК 519.872**

**Мартышкин А.И.,**

кандидат технических наук,

доцент кафедры ВМиС

Пензенского государственного технологического университета,

г. Пенза, Российская Федерация

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СРЕДСТВ СИНХРОНИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ В МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ**

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-07-00012 А).*

*Аннотация.* В статье показаны методы планирования оживленных семафоров, которые используются для синхронизации взаимодействующих процессов при их доступе к общему ресурсу в многопроцессорных системах. Предложены математические модели на основе систем и сетей массового обслуживания для оценки временных потерь процессов из-за образования перед семафором очередей ожидающих процессов. Построены графики. По работе сделаны соответствующие выводы.

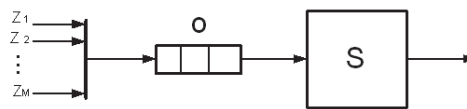
*Ключевые слова:* многопроцессорная система, математическое моделирование, операционная система, семафор, общий ресурс, критическая секция, теория массового обслуживания.

Существует два метода синхронизации взаимодействующих процессов: метод взаимных исключений и условная (барьерная) синхронизация [1]. Способы и средства реализации барьерной синхронизации упоминаются в [2]. В данной работе исследуются модели и методы реализации взаимных исключений, к которым относят блокирующие переменные, мьютексы, семафоры [3; 4; 5]. Будем называть их семафором, поскольку битовый семафор несет ту же функцию, что и блокирующая переменная, и мьютекс. Семафоры используются для координации использования одиночного ресурса или фиксированного множества общих ресурсов (ОР) несколькими процессами [6; 7; 8]. Проблема заключается в том, что взаимодействующие процессы такого рода приводят к конфликту транзакций, поскольку они вступают в противоречие друг с другом. Возникающие конфликты приводят к потерям производительности операционной системы (ОС) в целом. Наиболее характерно это проявляется в многопроцессорных системах (МПС), когда взаимодействующие процессы реализуются в независимых центральных процессорах (ЦП), которые могут потребовать одновременно ОР. В мультипрограммных системах подобная ситуация также имеет место быть.

Если ОР требуется слишком большому числу ЦП, то они ставятся в очередь к семафору. По мере освобождения ОР запросы удовлетворяются традиционно по принципу: первым пришел — первым обслужен (FIFO). Там, где разрешена параллельная обработка и имеется единица ОР, некоторый процесс может держать его весьма продолжительное время, а другие, готовые к выполнению процессы, будут ожидать окончания его выполнения, причем быстро исполняющиеся процессы скоро неминуемо «застрянут» в более медленных.

Семафоры характеризуются как оживленные или неживленные. Оживленными являются семафоры, к которым часто обращаются (т. е. интервал между запросами очень мал). В системе с  $N$  процессами и  $M$  ОР очередь к семафору может содержать до  $N-M$  процессов.

**Планирование на основе бесприоритетной дисциплины FIFO.** Будем считать, что предоставление ОР производится диспетчером задач (ДЗ), осуществляющим планирование ресурса. Если выбор заявок происходит в порядке поступления FIFO (рис. 1), то дисциплина обслуживания будет бесприоритетной.



*Рис. 1. Модель обслуживания на основе дисциплины FIFO с многомерным входящим потоком*

Пусть к семафору обращаются  $M$  разных процессов, т.е. поступают  $M$  типов заявок с одинаковой интенсивностью, но разным временем обслуживания. Предположим, что каждый процесс создает простейший поток заявок, а времена их обслуживания имеют экспоненциальное распределение. Тогда среднее время ожидания для одной заявки в очереди к семафору составит [9]:

$$t_s = \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i \tau_i}{1 - R}, \quad (1)$$

где  $\rho_i$  – нагрузка семафора  $i$ -м процессом,  $R$  – суммарная нагрузка семафора от всех процессов. Если каждый ЦП формирует один тип процесса, в таком случае  $M=n$ .

Известно, что критический вопрос в управлении семафорами касается концепции предоставления ОР в порядке поступления запроса (FIFO). Решение проблемы заключается в том, чтобы сократить среднее время выполнения процессов в критических секциях (КС) [1; 2].

**Приоритетное планирование.** С учетом того, что одни и те же процессы обращаются к семафору многократно (например, в известной и широко применяемой задаче «производители-потребители»), можно считать, что в очереди к семафору находятся процессы, получившие уже обслуживание. Следовательно, возможно использование стратегии планирования «короткий процесс – первым» [1], обеспечивающей сокращение среднего оборотного времени обращения к ОР. Для реализации метода необходимо регистрировать истекшие времена обслуживания процессов в семафоре и в зависимости от их длительности присваивать приоритеты. Поскольку вошедший в КС процесс прерывать нельзя, то прио-

ритеты должны быть относительными.

В результате такого планирования процессы сортируются по очередям, причем, чем больше номер очереди, тем ниже её приоритет (рис.2). Самый высокий приоритет получает очередь процессов, имеющая наименьшее время обслуживания. Сортировка осуществляется ДЗ на основании измеренного времени выполнения процесса в семафоре  $\tau_i$ .

Предположим, что каждый ЦП создает поток заявок  $Z_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), а их времена обслуживания имеют экспоненциальное распределение. Пусть ДЗ формирует потоки заявок с интенсивностями  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ , каждый из которых имеет приоритет  $k_i$  ( $i=1, \dots, M$ ).

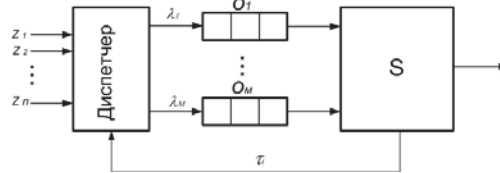


Рис.2. Модель приоритетного обслуживания

Среднее время ожидания в очереди к семафору для одной заявки  $k$ -го приоритета составит [2]:

$$t_{sk} = \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i \tau_i}{(1 - R_{k-1})(1 - R_k)}, \quad (2)$$

где  $\rho_i$  – загрузка семафора  $i$ -м процессом,  $R_{k-1}$  и  $R_k$  – суммарные загрузки семафора от процессов, создаваемых потоками  $Z_1, \dots, Z_{k-1}$  и  $Z_1, \dots, Z_k$  соответственно.

**Математическая модель для оценки временных потерь.** Пусть МПС содержит хотя бы один ОР, доступный множеству процессов, выполняемых на ЦП и защищаемый семафором  $S$ . Причем каждый из  $n$  ЦП функционирует в мультипрограммном режиме и, по крайней мере, один или несколько выполняемых процессов, а в предельном случае все процессы, формируют запросы к семафору  $S$ .

Аналитическая модель МПС с одиночным ОР для оценки потерь производительности из-за конфликтов за доступ к семафору, при использовании концепции планирования типа *FIFO*, изображена на рис. 3а. Модель представлена в виде разомкнутой стохастической сети массового обслуживания (СеМО), состоящей из  $n$  ( $S_1, \dots, S_n$ ) одноканальных систем массового обслуживания (СМО), моделирующих ЦП, и одноканальной СМО ( $S_{n+1}$ ), моделирующей семафор. Причем СМО  $S_0$  выступает в качестве внешнего источника заявок на выполнение процессов и в качестве поглотителя обслуженных заявок.

Пусть на вход МПС поступает поток запросов на выполнение процессов с интенсивностью  $\lambda_0 = 1/T$ , где  $T$  – средняя длительность интервала между поступающими на вход запросами. Поток запросов распределяется предварительным планировщиком по ЦП с вероятностями  $p_{01}, \dots, p_{0n}$  (см. граф вероятностей передач СеМО, изображенный на рис. 3б). Каждый ЦП содержит собственный планировщик, формирующий очередь запросов  $O_i$ . Будем считать, что время выполнения запроса  $v_i$  в каждом ЦП распределено по экспоненциальному закону.

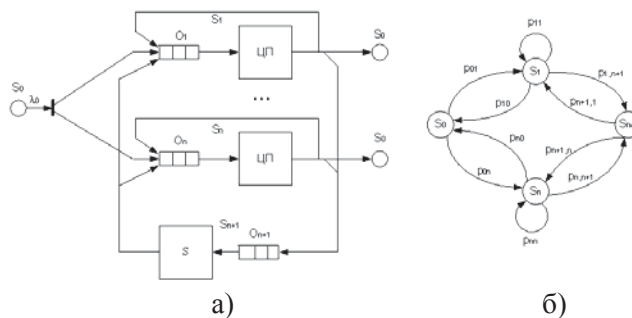


Рис. 3. Схема аналитической модели  $n$ -процессорной системы (а) и её граф передач (б), матрица вероятностей передач (в)

Процессы, выполняемые ЦП, также формируют потоки запросов к семафору с интенсивностями  $\lambda_i$ , где  $i=1, \dots, n$ . Таким образом, каждая модель в составе СеМО имеет тип М/М/1 [9], причем на входе семафора ( $S_{n+1}$ ) действует многомерный поток. У каждого потока время обслуживания запроса к семафору составляет  $\tau_i$  и подчиняется экспоненциальному закону.

Для упрощения предположим, что потоки запросов на выполнение процессов на входе МПС распределяются равномерно по ЦП, т.е.  $p_{01} = \dots = p_{0n} = 1/n$ . Причем  $i$ -й ЦП ( $S_1, \dots, S_n$ ), обслужив очередную заявку, передает её на обслуживание в семафор ( $S_{n+1}$ ) с вероятностями  $p_{1,n+1} = \dots = p_{n,n+1}$  (т.е. каждый ЦП формирует потоки запросов семафора с одинаковой интенсивностью). Заявки, получившие обслуживание в семафоре, с равной вероятностью возвращаются на продолжение обслуживания в ЦП, следовательно,  $p_{n+1,1} = \dots = p_{n+1,n} = 1/n$ . Предположим также, что вероятность получения заявкой полного обслуживания в  $i$ -м узле (вероятность выхода заявки из сети) составляет  $p_{i0}$ , а вероятность, что заявка останется на обслуживании в СМО  $S_i$ , составляет  $p_{ij}$ , где  $i, j = 1, \dots, n$  [9].

Пусть среднее время обслуживания  $i$ -го процесса в семафоре сравнимо со временем обслуживания его в ЦП (такая ситуация характерна для оживленного семафора) [1], и конкретные значения  $\tau_i$  могут отличаться в среднем не более чем в 2-3 раза. Для конкретности примем, что среднее время обслуживания в ЦП составляет  $v_i = 1$  единицу ( $i = 1, \dots, n$ ) времени, а среднее значение в семафоре  $\tau = \sum_{i=1}^n \tau_i / n = 0,8$  единиц времени.

Примем, что на одну реализацию некоторого процесса в среднем приходится 1000 циклов обращения к семафору. Тогда вероятность того, что заявка покинет МПС (процесс полностью выполнен) составит  $p_{i0} = 0,001$ . Вероятность же того, что заявка останется на обслуживании составит  $(1 - p_{i0}) = 0,999$ .

Тогда соотношение вероятностей того, что заявка останется на обслуживании в ЦП к вероятности, что она перейдет на обслуживание в семафор составляет в среднем 7 единиц. Это означает, что в среднем через каждые 8 этапов любой ЦП формирует запрос к семафору, т.е. интервал между запросами семафора процессом в среднем составляет  $\Theta = 8$ . Тогда вероятность запроса семафора некоторым процессом, выполняющимся  $i$ -м ЦП, составит  $p_{i,n+1} = 1/\Theta$  ( $i=1, \dots, n$ ), а вероятность того, что процесс останется на обслуживании в ЦП составит  $p_{ij} = 1 - (p_{i,n+1} + p_{i0}) = 0,874$ , где ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

Время ожидания заявки в сети составляет

$$T_w = T_{CP} + T_S = \alpha_1 t_{w1} + \alpha_2 t_{w2} + \dots + \alpha_{n+1} t_{wn+1}, \quad (3)$$

где  $T_{CP}$  – суммарное время ожидания в очередях к ЦП,  $T_S$  – суммарное время ожидания в очереди к семафору;  $\alpha_i = \lambda_i / \lambda_0$  – коэффициент передачи сети ( $i=1, \dots, n+1$ );  $t_{wi}$  – единичное время ожидания в  $i$ -й СМО (одной заявки к процессорному узлу), причем  $t_{wi}$  определяется по формуле для одноканальной СМО с одномерным входящим потоком, т.е.  $t_{wi} = \rho_i v_i / (1 - \rho_i)$  ( $i=1, \dots, n$ );  $t_{wn+1}$  – единичное время ожидания в очереди к  $(n+1)$ -й СМО (к семафору), причем для варианта планирования на основе FIFO  $t_{wn+1}$  рассчитывается по формуле (1), а для варианта планирования на основе приоритетов – по формуле (2).

Интенсивности потоков заявок определяются системой уравнений:  $\lambda_i = \sum_{j=0}^n p_{ji} \lambda_j$ , где  $p_{ji}$  – вероятность передачи из СМО  $S_j$  в СМО  $S_i$ ;  $i, j = 0, 1, \dots, n+1$ .

Примем, что в исходном варианте заявки поступают на вход с интенсивностью  $\lambda_0 = 0,008$  заявок в единицу времени. Построим график зависимости времени пребывания (ожидания) заявок в сети от числа потоков, обслуживаемых семафором. Для этого будем варьировать параметр  $n$  в пределах от 2 до 12 процессоров при постоянном среднем времени обслуживания в семафоре.

Расчет характеристик для дисциплин с относительными приоритетами (ОП) реализован в MathCAD 14. На основе результатов расчетов построены зависимости времени ожидания заявок в сети от числа потоков, обслуживаемых семафором, от среднего времени обслуживания в семафоре, а также от дисциплины обслуживания.

Используются следующие обозначения:  $\rho_s$  – средняя загрузка семафора;  $t_{s1}$  и  $t_{s1}$  – время ожида-

ния в очереди к семафору при использовании стратегии планирования FIFO и приоритетной стратегии соответственно;  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$  – время ожидания заявок в сети при использовании стратегии планирования FIFO и приоритетной стратегии соответственно;  $\eta_1$  и  $\eta_2$  – коэффициенты временных потерь, выраженные в процентах к  $T_{CP}$  сети при использовании стратегии планирования FIFO и приоритетной стратегии соответственно;  $n$  – кол-во процессоров.

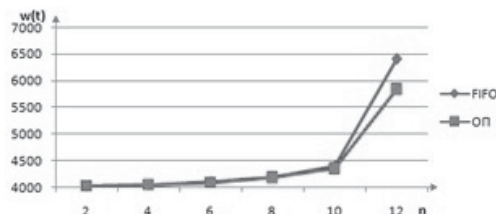


Рис. 4. График среднего времени ожидания заявок в сети при использовании стратегии планирования FIFO и приоритетной стратегии

На основе графиков зависимости среднего времени ожидания от приоритета потока при  $n=12$  (рис.5, а),  $n=6$  (рис.5, б) можно сделать вывод, что введение приоритетной дисциплины обслуживания тем эффективнее, чем больше кол-во процессоров (поскольку при  $n=6$  среднее время ожидания при ОП менее FIFO у высших 4-х приоритетов, а при  $n=12$  – у 11-и).

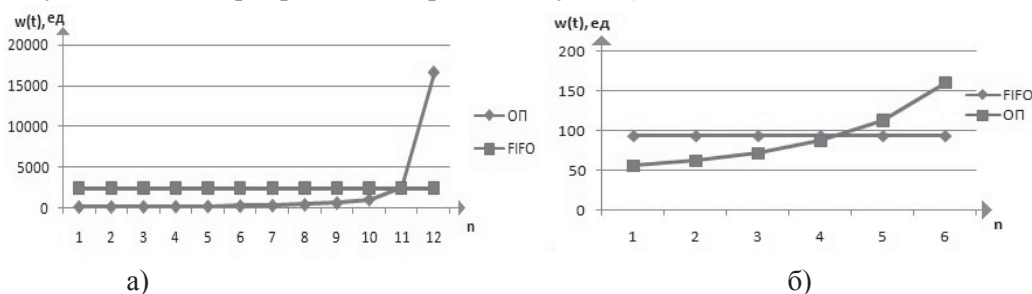


Рис. 5. Графики среднего времени ожидания в зависимости от приоритета потока при  $n=12$  (а),  $n=6$  (б)

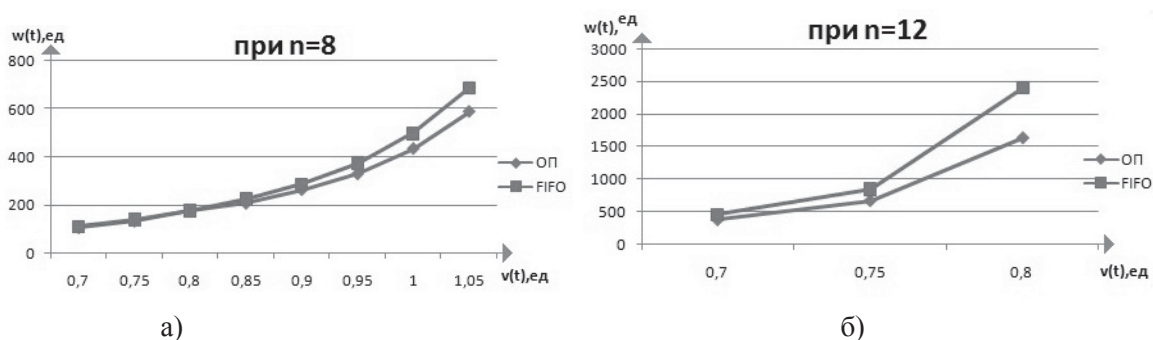
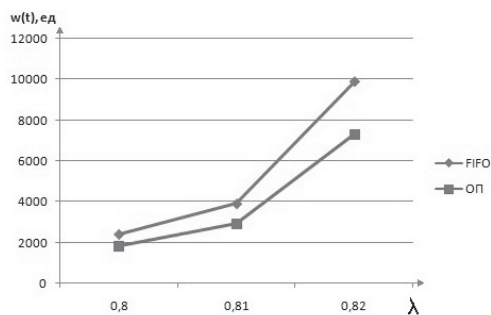


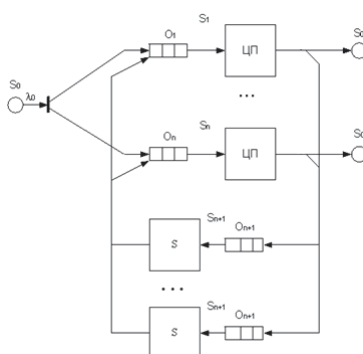
Рис. 6. Графики зависимости среднего времени ожидания от среднего времени обслуживания в семафоре при  $n=8$ (а),  $n=12$ (б)



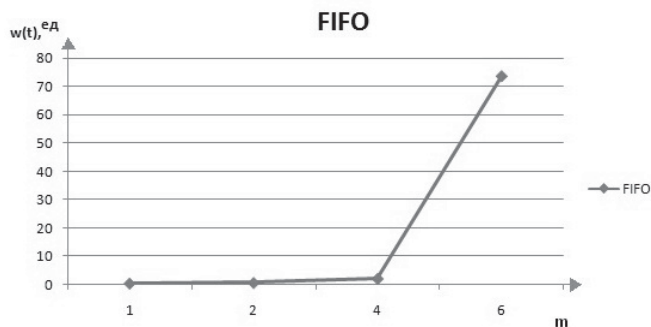
**Рис. 7.** Графики зависимости среднего времени ожидания от интенсивности входящего потока при  $\lambda=0,80..0,82$

Таким образом, введение ОП приводит к уменьшению времени ожидания заявок с высокими приоритетами и увеличению времени ожидания заявок с низкими приоритетами по сравнению с беспriorитетным обслуживанием. При увеличении числа потоков введение приоритетной дисциплины обслуживания приводит к значительному уменьшению среднего времени ожидания в системе – около 14% при 12-процессорах (FIFO:  $\omega_{cp}=6400$  ед., ОП:  $\omega_{cp}=5838$  ед.).

При увеличении интенсивности значение времени ожидания доступа к семафору при приоритетной дисциплине обслуживания также меньше чем для беспriorитетной дисциплины. Для повышения производительности системы можно использовать дисциплину обслуживания, где заявки с низким приоритетом должны обслуживаться на основе дисциплины FIFO. Так как в реальной системе число ресурсов необходимых многим ЦП может быть сколь угодно велико, было проведено исследование МПС с использованием  $m$  семафоров. Модель системы представлена на рис.8. Интенсивность входного потока  $\lambda=2,4$ .



**Рис. 8.** Модель многопроцессорной системы с использованием  $m$  семафоров



**Рис. 9.** График зависимости среднего времени ожидания от числа семафоров



На графике (рис.9) наблюдаем, что при увеличении числа семафоров в МПС происходит резкое возрастание времени ожидания доступа к ОР при дисциплине планирования FIFO.

**Выводы:** Полученные математические модели позволяют произвести количественные оценки времени ожидания процессов, обращающихся к общему ресурсу посредством семафора. Модели могут быть использованы при проектировании параллельных операционных систем для многопроцессорных систем, в том числе и реального времени, где критичным является время выполнения процессов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Таненбаум Э., Бос Х. Современные операционные системы. 4-е изд. – СПб.: Питер, 2015. – 1120 с.
2. Мартышкин А.И. Математическое моделирование диспетчеров задач в многопроцессорных вычислительных системах на основе стохастических сетей массового обслуживания: диссертация ... кандидата технических наук: 05.13.18 / Пензенская государственная технологическая академия. – Пенза, 2013.
3. Мартышкин А.И. Исследование диспетчеров задач многопроцессорных систем на моделях массового обслуживания // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2012. – № 5. – С. 139–145.
4. Мартышкин А.И. Исследование алгоритмов планирования процессов в системах реального времени // Современные методы и средства обработки пространственно-временных сигналов : сборник статей XIII Всероссийской научно-технической конференции / под ред. И.И. Сальникова. – Пенза, 2015. – С. 118–124.
5. Мартышкин А.И., Карасева Е.А. Математические модели для качественной оценки производительности семафоров многопроцессорных вычислительных систем // Инновации в науке. – 2015. – № 50 – С. 40–45.
6. Бершадская Е.Г., Карасева Е.А. Математическое моделирование процесса управления одиночным общим ресурсом в многопроцессорной вычислительной системе // Инновации в науке. – 2016. – № 54 – С. 169–174.
7. Карасева Е.А. К вопросу анализа производительности средств доступа к общим ресурсам в многопроцессорных системах методом аналитического моделирования // Новая наука: теоретический и практический взгляд. – 2016. – № 2-2 (63) – С. 161–164.
8. Мартышкин А.И., Карасева Е.А. Аппаратная поддержка катализатора для реализации механизма очередей сообщений в многопроцессорных вычислительных системах // Технические науки – от теории к практике. – 2015. – № 51 – С. 40–44.
9. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.

***A.I. Martyshekin. Mathematical modeling and performance evaluation tools synchronization of processes in multiprocessor systems. – Article.***

***Анотація.*** У статті показані методи планування жвавих семафорів, які використовуються для синхронізації взаємодіючих процесів при їх доступу до загального ресурсу в багатопроцесорних системах. Запропоновано математичні моделі на основі систем і мереж масового обслуговування для оцінки часових втрат процесів через утворення перед семафором черг, що очікують процесів. Побудовані графіки. По роботі зроблені відповідні висновки.

***Ключові слова:*** багатопроцесорна система, математичне моделювання, операційна система, семафор, загальний ресурс, критична секція, теорія масового обслуговування.

***Alexey I. Martyshekin. Mathematical Modeling and Performance Evaluation Tools Synchronization of Processes in Multiprocessor Systems. – Article.***

***Summary.*** The article shows techniques for planning the busy semaphore used to synchronize cooperating processes when they access the shared resource in multiprocessor systems. Mathematical models based on systems and queueing networks for estimation of time losses due to the formation in front of the semaphore queue of pending processes. Built graphics. For work appropriate conclusions.

***Key words:*** multiprocessor system, mathematical modeling, operating system, a semaphore, a shared resource, critical section, Queueing theory.