

23. Мартышкин А.И., Бикташев Р.А., Востоков Н.Г. Математическое моделирование диспетчеров задач для систем параллельной обработки на основе разомкнутых систем массового обслуживания // В мире научных открытий. – 2013. – № 6.1 (42). – С. 81–101.

А.І. Мартишкін. Чисельне моделювання диспетчерів завдань із стратегією розподілу в просторі в складі багатопроцесорної системи на основі відкритих мереж масового обслуговування. – Стаття.

Анотація. У статті проводиться моделювання підсистеми диспетчеризації для аналізу продуктивності диспетчера завдань із стратегією розподілу в просторі в складі багатопроцесорної системи. Методи дослідження базуються на положеннях теорії систем і мереж масового обслуговування і теорії ймовірностей. У статті наводиться можливий варіант чисельного моделювання диспетчерів завдань на основі відкритих (розімкнених) мереж масового обслуговування. Результатами роботи є вирази для розрахунку характеристик представленої системи: для кожного класу задач окремо і для сумарного потоку задач. Зроблені висновки.

Ключові слова: математична модель, диспетчер завдань, розподіл у просторі, випадковий процес, система масового обслуговування, пріоритет, ймовірність.

Alexey I. Martyshkin. Numerical Modeling of Task Managers with the Strategy of Separation in Space in Multiprocessor Systems Based on Open Queueing Networks. – Article.

Summary. The article presents a simulation of the dispatching subsystem to analyze the performance of the task with the strategy of separation in space in multiprocessor system. Research methods based on the theory of systems and networks queueing and probability theory. The article presents the variant of numerical modeling of tasks based on open (open) queueing networks. The results are expressions for calculating the characteristics of the system: for each class of problems separately and for the total task flow. Conclusions. The conclusions made.

Key words: mathematical model, task manager, space division, the stochastic process, queueing system, priority, probability.

УДК 519.237.07

В.А. Шовин,
научный сотрудник,
Омский филиал Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Института математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения РАН
г. Омск, Российская Федерация

ВЕРЛЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА КРОВИ В ДЕФОРМИРУЕМОМ СОСУДЕ

Аннотація. Проведено моделювання потоку двохфазної крові, состоящей из эритроцитов и плазмы, в эластичном деформируемом сосуде на базе физической имитации по методу Верле. Получены профили скоростей фаз в кровеносном сосуде: эритроциты двигаются быстрее плазмы, профиль эритроцитов оказывается более плоским к центру сосуда, и более крутым у стенки. Данные профили соответствуют меньшему внутреннему трению эритроцитов, и эритроцитов и плазмы, чем плазмы, а также меньшему трению эритроцитов и стенки сосуда.

Ключевые слова: метод Верле, деформируемый кровеносный сосуд, поток крови

Введение. Главное назначение кровообращения состоит в организации обмена веществ между тканями организма и внутренней средой. Циркуляция крови осуществляется по сложной системе кровеносных сосудов. В данной работе затронута часть проблемы, связанной с течением крови по сосудам.

Движение крови по сосудам имеет ряд особенностей [Багаев 2008]:

- кровь рассматривается как двухфазная среда, состоящая из плазмы и эритроцитов;
- средняя скорость движения эритроцитов по сосуду больше, чем средняя скорость плазмы [Ткаленко 1984];
- профиль скорости поступательного движения эритроцитов в трубке оказывается у оси более плоским, а у стенки – более крутым, чем параболический профиль течения Пуазейля;
- стенка кровеносного сосуда имеет способность деформироваться под влиянием артериального давления.

Обзор работ по гидродинамике крови дан в [Павловский 1970, Педли 1983, Каро 1981].

В данной работе проведено 3-х мерное моделирование потока крови в деформируемом эластичном сосуде при нестационарном режиме накачки на базе метода Верле физической имитации. Кровеносный сосуд представлен как упругая структура – набор узлов и упругих связей между ними. В качестве таких связей выступали пружинная связь между парой точек с равновесным расстоянием между точками и ребра жесткости тройки узлов с равновесным углом между узлами. Кровь представлена двумя типами частиц: плазма и эритроциты. Частицы могут двигаться по инерции. Все типы частиц имеют внутреннее трение, как для частиц своего, так и другого типа, а также трение со стенками сосуда. Частицы различных фаз имеют силы отталкивания. Возможна передача импульса поперечного движения частиц узлам стенки сосуда, а также изменение направления поперечного движения частиц при столкновении со стенкой сосуда.

Для расчета движения частиц фаз крови, а также узлов кровеносного сосуда и учета связей между узлами стенки сосуда предлагается использовать метод численного интегрирования Верле. Метод Верле – это итерационный метод вычисления следующего местоположения точки по текущему и прошлому.

Метод Верле

Алгоритм Верле используется для вычисления следующего положения точки по текущему и прошлому:

$$\bar{x}_j^i = \bar{x}_j^{i-1} + \bar{v}_j + \sum_{k=1}^n \bar{d}_{kj},$$

$\bar{x}_j^i = (x_{j1}^i, x_{j2}^i, \dots, x_{jm}^i)$ – вычисляемые координаты j -ой точки на i -ой итерации,

m – размерность пространства,

$\bar{v}_j = \bar{x}_j^{i-1} - \bar{x}_j^{i-2}$ – вектор скорости j -ой точки.

\bar{d}_{kj} – вектор влияния k -ой частицы на j -ую частицу.

На систему точек накладываются ограничения:

Некоторые из точек связаны упругими стержнями заданной длины.

Алгоритм работает следующим образом:

Вычисляются новые положения точек.

Для каждой связи удовлетворяется соответствующее условие.

Шаг 2 повторяется s раз.

Например, $s = 16$.

Процедура релаксации связи описывается следующими формулами:

Если связь представлена точками \bar{a} и \bar{b} с равновесным расстоянием между ними t , то

$$\bar{a}^i = \bar{a}^{i-1} + \bar{r},$$

$$\bar{b}^i = \bar{b}^{i-1} - \bar{r},$$

$$\bar{r} = f \cdot q \cdot \frac{t - |\bar{a}^{i-1} - \bar{b}^{i-1}|}{|\bar{a}^{i-1} - \bar{b}^{i-1}|} (\bar{a}^{i-1} - \bar{b}^{i-1}),$$

$f = 0.7$ – коэффициент упругости связи,

$q = \frac{1}{s}$ – коэффициент, зависящий от числа s повторений шага 2.

Тройки узлов могут образовывать ребра жесткости с равновесным углом. Такие связи предлагается эмулировать связями в виде упругих стержней между крайними точками. Равновесное расстояние между крайними точками при этом задается из равенства треугольника. Если связь представлена точками \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} с равновесным углом $\angle abc = \beta$, тогда равновесное расстояние $ac = t$ между точками \bar{a} и \bar{c} вычисляется по формуле:

$$t = \sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 - 2(ab)(bc)\cos\beta}.$$

Модель кровеносного сосуда

Узлы стенки сосуда задаются следующими системами точек $H^j = \{\bar{h}_i^j\}$,

$i = 1 \dots w$, где

w – число точек, образующих срез сосуда,

$j = 1 \dots g$,

g – количество круглых сечений сосуда.

l_1 – расстояние между парой соседних точек одного сечения.

l_2 – расстояние между парой соседних точек соседних сечений.

Пары точек $\{\bar{h}_i^j, \bar{h}_{i+1}^j\}$ образуют связь с равновесным расстоянием l_1 .

Пары точек $\{\bar{h}_i^j, \bar{h}_i^{j+1}\}$ образуют связь с равновесным расстоянием l_2 .

Пары точек $\{\bar{h}_i^j, \bar{h}_{i+1}^j, \bar{h}_{i+2}^j\}$, $\{\bar{h}_i^j, \bar{h}_i^{j+1}, \bar{h}_i^{j+2}\}$ образуют связь с равновесным углом, равным начальному углу между точками.

Внутренние силы

Частицы крови делятся на два типа частиц: эритроциты $E = \{\bar{e}_i\}$ и плазма $P = \{\bar{p}_i\}$.

Между частицами каждого типа действуют силы внутреннего трения

Вектор \bar{d}_{kj}^t влияния частицы e_k на частицу e_j :

$$\bar{d}_{kj}^t = (\bar{v}_k - \bar{v}_j) \cdot t_e \cdot (r_e^t - r_{kj}^t) / r_e^t, \text{ где}$$

t_e – коэффициент внутреннего трения эритроцитов,

r_{jk}^t – расстояние между эритроцитами,

r_e^t – эффективный радиус трения эритроцитов (эритроциты имеющие $r_{jk}^t > r_e^t$ не взаимодействуют),

\bar{v}_k и \bar{v}_j – скорости эритроцитов.

Аналогично для частиц плазмы вводится сила внутреннего трения с коэффициентами t_p и r_p^t .

Между плазмой и эритроцитами вводится сила трения с коэффициентами t_{ep} и r_{ep}^t .

Между узлами стенки сосуда и частицами крови вводятся силы трения с коэффициентами t_{hp} ,

r_{hp}^t и t_{he} , r_{he}^t .

Вводятся силы отталкивания между частицами e_k и e_j :

$$\bar{d}_{kj}^o = (\bar{e}_k - \bar{e}_j) \cdot o_e \cdot (r_e^o - r_{kj}^o) / r_e^o$$

o_e – коэффициент отталкивания эритроцитов,

r_e^o – эффективный радиус отталкивания эритроцитов (эритроциты имеющие $r_{jk} > r_e^o$ не взаимодействуют).

Аналогично для частиц плазмы вводится сила отталкивания с коэффициентами σ_p и r_p^o .

Между плазмой и эритроцитами вводится сила отталкивания с коэффициентами σ_{ep} и r_{ep}^o .

Если координаты j -ой частицы эритроцитов не принадлежат полости сосуда, то частица меняет направления поперечного движения, а также взаимодействует с ближайшим k -ым узлом стенки сосуда:

$$\bar{d}_{kj}^h = \bar{v}_j \cdot s_e, \text{ где}$$

\bar{v}_k – скорость k -го эритроцита с измененными по знаку поперечными координатами,

s_e – коэффициент передачи импульса при столкновении эритроцита с узлом стенки.

Аналогично для частиц плазмы вводится коэффициент s_p .

Численный эксперимент

Стенка кровеносного сосуда генерировалась по описанной модели со связями растяжения для пар узлов и ребрами жесткости для троек узлов стенки. Поток частиц крови генерировался у крайнего сечения сосуда с варьируемой продольной скоростью: от систолической максимальной до диастолической минимальной. Фазы крови генерировались послойно по очереди с одинаковой скоростью частиц в слое. Движение частиц крови в сосуде, их взаимодействие друг с другом, а также с узлами стенки сосуда, деформация стенки сосуда просчитывались на базе метода Верле. Проводился подсчет продольных профилей скоростей для фаз крови.

Программная реализация

Метод Верле был реализован программно с использованием общедоступной JavaScript библиотеки Verlet.js, которая была усовершенствована для многомерного случая. Web приложение моделирования потока крови в деформируемом сосуде на базе метода Верле доступно по адресу <http://svlaboratory.org/application/vessel> после регистрации нового пользователя. Приложение позволяет визуализировать процесс сходимости метода Верле в заданной плоскости координат (рис. 1-3).

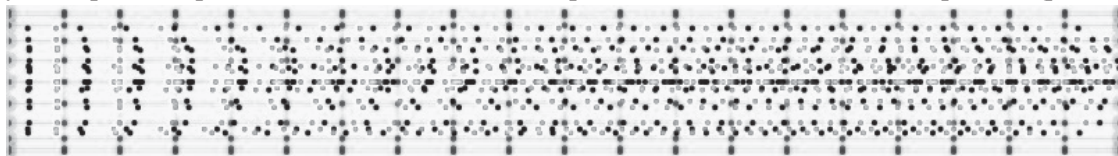


Рис. 1. Поток частиц крови в сосуде

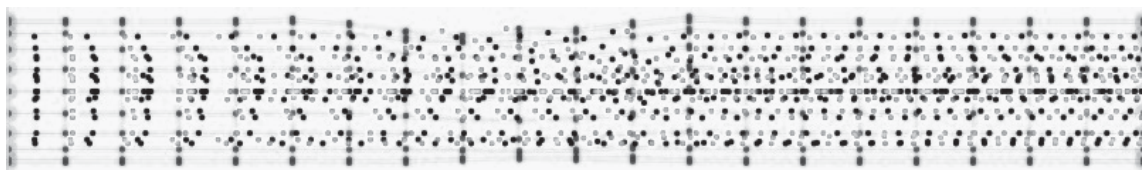


Рис. 2. Деформации стенки сосуда

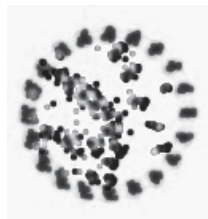


Рис. 3. Поперечное отображение сосуда

При $t_e < t_p$ и $t_{ep} < t_p$, наблюдаются следующие профили скоростей (рис. 4, 5).

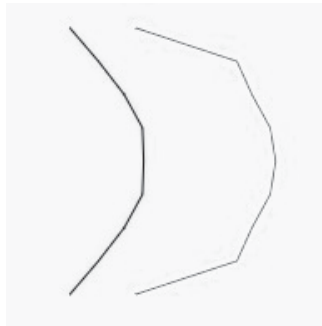


Рис. 4. Продольные профили скоростей эритроцитов (светлый) и плазмы (темный)

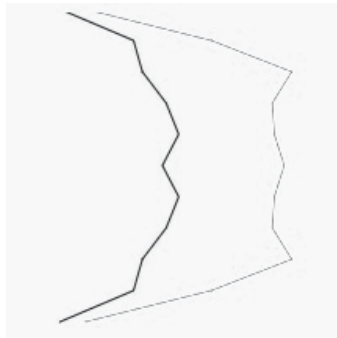


Рис. 5. Продольные профили скоростей эритроцитов (светлый) и плазмы (темный) при деформации сосуда

Эритроциты двигаются быстрее плазмы, и скорость эритроцитов имеет профиль, отличный от параболического течения Пуазейля. Такие особенности движения крови по сосудам возможно объяснить без использования специальной модели течения крови как ядра, содержащего эритроциты, и пристеночного слоя, состоящего только из плазмы [Sharan 2001], благодаря введению различных коэффициентов трения (вязкости) и их взаимоотношению для фаз крови.

Заключение

На базе усовершенствованной до многомерного случая библиотеки Верле интегрирования Verlet.js проведено моделирование потока крови в деформируемом эластичном сосуде. При внутреннем трении эритроцитов и эритроцитов и плазмы меньшем, чем внутреннее трение плазмы, получены профили скоростей, согласующиеся с известными данными. Именно эритроциты двигаются быстрее плазмы, профиль эритроцитов оказывается более плоским к центру сосуда, и более крутым у стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багаев С.Н. и др. Система кровообращения и артериальная гипертония: биофизические и генетико-физиологические механизмы, математическое и компьютерное моделирование. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. – 252 с.
2. Ткаленко Б.И. Физиология кровообращения: Физиология сосудистой системы. – Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1984.
3. Павловский Ю.Н., Регирер С.А., Скобелева И.М. Гидродинамика крови // Итоги науки. Серия: Гидромеханика. – М.: ВИНТИ, 1970.
4. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. – М.: Мир, 1983.
5. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. – М.: Мир, 1981.
6. Sharan M., Popel A.S. A two-phase model for flow of blood in narrow tubes with increased effective viscosity near the wall // Biorheology. – 2001. V. 38. – P. 415–428.

В.А. Шовін. Верле моделювання потоку крові у деформованій судині. – Стаття.

Анотація. Проведено моделювання потоку двофазної крові, що складається з еритроцитів і плазми, в еластичній деформованій судині на базі фізичної імітації за методом Верле. Отримано профілі швидкостей

фаз в кровоносній судині: еритроцити рухаються швидше плазми, профіль еритроцитів виявляється більш плоским до центру судини, і більш крутим у стінки. Дані профілі відповідають меншому внутрішньому тертю еритроцитів, і еритроцитів і плазми, ніж плазми, а також меншого тертя еритроцитів і стінки судини.

Ключові слова: метод Верле; кровоносна судина, що деформується; потік крові.

Vladimir A. Shovin. Verlet modeling of blood flow in a deformable vessel. – Article.

Summary. The modeling of two-phase blood flow, consisting of red blood cells and plasma in an elastically deformable vessel on the basis of a physical simulation by Verlet method. Phase velocity profiles in the blood vessel: erythrocytes move faster plasma, erythrocytes profile is flatter to the center of the vessel, and the wall is steeper. These profiles correspond to the lower internal friction of red blood cells, and red blood cells and plasma, than the plasma, and red blood cells have less friction with the vessel wall.

Key words: Verlet method, deformable blood vessel, blood flow.